数理解析研究所講究録
497巻 1983年 184-189

裏返し変換の一般化について

名大 理学部 寺西 鎮男

記号

$$n,\ m,\ d_i \in \mathbb{N}. \qquad m > d_1,$$

$$\underline{d} = (d_1, \cdots d_r) \qquad \sum_{i=1}^{r} d_i = n.$$

$$\underline{d}^* = (m-n,\ d_r,\ d_{r-1},\ \cdots,\ d_2)$$

$$GL(\underline{d}, n) = \left\{ \begin{pmatrix} \boxed{d_1} & & * \\ & \boxed{d_2} & \\ 0 & & \ddots \\ & & & \boxed{d_r} \end{pmatrix} \right\} \cap GL(n, \mathbb{C})$$

群 G の m-次元ベクトル空間への表現を $(G, \rho, V(m))$ とする。

Lemma

$(G \times GL(\underline{d}, n),\ \rho \otimes \square^*,\ V(m) \otimes V^*(n))$ が概均質ベクトル空間 $\Longleftrightarrow$

$(G \times GL(\underline{d}^*, m-d_1),\ \rho^* \otimes \square^*,\ V^*(m) \otimes V^*(m-d_1))$ が概均質ベクトル空間.

証明． $V(n)^*$ の base を1つ fix して．$u_1, \cdots u_n$ とする．

$V(m) \otimes V(n)^* \ni x$ について $x = \sum_{i=1}^{n} v_i \otimes u_i$ と表わす．他の表わし方： $x = \sum v_i' \otimes u_i'$

但し．$GL(\underline{d}, n) \ni A = (a_{ij})$ により．

$$u_i = \sum a_{ji} u_j'$$

$$x = \sum_i v_i \otimes u_i$$

$$= \sum_i \left(\sum_j a_{ij} v_j \right) \otimes u_i'$$

$$\therefore \quad v_i' = \sum_j a_{ij} v_j$$

Def. $\left(\overset{d_1}{\underset{i=1}{\mathbb{C}}} v_i, \overset{d_1+d_2}{\mathbb{C}} v_i, \cdots \overset{d_1+\cdots+d_r}{\mathbb{C}} v_i \right)$ を $M(x)$ で表わす．

Def. Vector space の組のなす ~~旗~~ 旗多様体 $F(d_1, \cdots d_r)$ を

$$F(d_1 \cdots d_r) = \{ V_1 \subset \cdots \subset V_r \subset V(m) \mid \dim V_i = d_1 + \cdots + d_i \}$$

として定める．上の写像 $M(x)$ により．

$$\begin{array}{cccc} M: & V(m) \otimes V(n)^* & \longrightarrow & F(\underline{d}) \\ & \cup\!\!\!\!\!\downarrow & & \psi \\ & x & \longmapsto & M(x) \end{array}$$

は．Zariski open な x に対して．well-defined で．$M(V(m) \otimes V(n)^*)$ の Zariski closure は $F(\underline{d})$ に一致する．

しかも．$M(x)$ の作り方から．$M^{-1} M(x)$ の上に．$GL(\underline{d}, n)$ は．transitive に作用する．従って．

$V(m) \otimes V^*(n)$ が．P.V

$\iff$ $(G, F(\underline{d}))$ が open orbit を持つ．

$W_i \underset{\mathrm{def}}{=} \{ v^* \in V^*(m) \mid v^*(V_{n-i+1}) = 0 \}$ と定義すると、

$\{ W_1 \subset \cdots \subset W_r \} \in F(\underline{d}^*)$

明らかに、

$(G, F(\underline{d}))$ が open orbit を持つ。

$\Longleftrightarrow$ $(G, F^*(\underline{d}^*))$ が open orbit を持つ

$\Longleftrightarrow$ $(G \times GL(\underline{d}^*),\ \rho^* \otimes \square^*,\ V^*(m) \otimes V(m-d_1)^*)$ が P.V.

q.e.d//

※ 上の lemma で $r=1$ の時が 裏返し変換に外ならない。

H. Weyl の Classical groups によれば、

$$S(V(m) \otimes V^*(n))^{G \times SL(\underline{d}, n)} \simeq S(x^1 \wedge \cdots \wedge x^{d_1}, x^1 \wedge \cdots \wedge x^{d_1+d_2}, \cdots, x^1 \wedge \cdots \wedge x^{d_1+\cdots+d_n})^G$$

$x^i = (x^i_1 \cdots x^i_m)$ $(1 \leq i \leq n)$

変数。

(Weyl. classical groups. P. 47)

ここで、$S(x^1 \wedge \cdots \wedge x^{d_1}, x^1 \wedge \cdots \wedge x^{d_1+d_2}, \cdots, x^1 \wedge \cdots \wedge x^{d_1+\cdots+d_n})$ は、

小行列式達の

$$\begin{vmatrix} x^1_{i_1} & \cdots & x^{d_1}_{i_1} \\ x^1_{i_2} & \cdots & x^{d_1}_{i_2} \\ \vdots & & \\ x^1_{i_{d_1}} & \cdots & x^{d_1}_{i_{d_1}} \end{vmatrix}_{1 \leq i_1 < i_2 < \cdots < i_{d_1} \leq m}, \quad \begin{vmatrix} x^1_{j_1} & \cdots & x^{d_1+d_2}_{j_1} \\ \vdots & & \\ x^1_{j_{d_1+d_2}} & \cdots & x^{d_1+d_2}_{j_{d_1+d_2}} \end{vmatrix}_{j_1 < j_2 < \cdots}$$

$\cdots\cdots$

の多項式全体を表わす事にする。

裏返し変換による相対不変式の対応

旗多様体 $F(\underline{d})$ の coordinate に dual coordinate を対応させる写像を $*$ であらわすと 写像

$$* \quad \mathbb{C}[F(\underline{d})] \xrightarrow{\sim} \mathbb{C}[F^*(\underline{d}^*)]$$

が定義されるが $(G \times GL(d^*, m-d_1),\ \rho^* \otimes \square^*,\ V^*(m) \otimes V^*(m-d_1))$ の相対不変式は $(G \times GL(\underline{d}, n)\ \rho \otimes \square^*,\ V(m) \otimes V(n)^*)$ の相対不変式を $*$ でひきもどしたものである。

$\underline{i_d} = (i_1, \cdots i_d)$ $(1 \leq i_1 < i_2 < \cdots < i_d \leq m)$ に対し

$$x_{\underline{i_d}} = \begin{vmatrix} x^1_{i_1} & \cdots & x^d_{i_1} \\ \vdots & & \\ \vdots & & \\ x^1_{i_d} & \cdots & x^d_{i_d} \end{vmatrix}$$

$$S^{l_1 \cdots l_m} = \left\{ \begin{array}{l} x_{\underline{i_d}} \text{ 達の多項式で各 } d \text{ について斉 } l_d \\ \text{次全体} \end{array} \right\}$$

とすれば $S^{l_1 \cdots l_m}$ は $GL(m)$-module で heighest weight $\sum_{i=1}^{m} l_i \Lambda_i$ に対応する既約な $GL(m)$-module である。

$$\mathbb{C}[x^1 \cdots x^m] = \bigoplus_{\underline{l}} S^{\underline{l}} \qquad l = (l_1, \cdots l_m)$$

で $\mathbb{C}[x^1 \cdots x^m]$ の $S^{\underline{l}}$ への projection を $\pi_{\underline{l}}$ とすれば f が $(G \times GL(\underline{d}\ n),\ \rho \otimes \square^*,\ V(m) \otimes V(n)^*)$ の 相対不変式の時 $\pi_{\underline{l}}(f)$ も相対不変式である。

例. $M(n,m;\mathbb{C})$ $n\times m$ 行列全体 特に $M(n,n,\mathbb{C})=M(n,\mathbb{C})$ とおく. $Tri_{下}(n,\mathbb{C})=\{n\times n$ 下三角行列全体$\}$

$Tri_{上}(n,\mathbb{C})=\{n\times n$ 上三角行列全体$\}$

$Tri_{下}(n,\mathbb{C})\times Tr_{上}(n,\mathbb{C})$ を $M_n(\mathbb{C})$ へ 次の如く作用させる. $g=(a,b)$ $(a\in Tri_{下}(n,\mathbb{C}),\ b\in Tri_{上}(n,\mathbb{C}))$ $x\in M(n,\mathbb{C})$ とする時 $g\cdot x=axb^{-1}$. 良く知られているように これは 概均質ベクトル空間 ([ ]) である.

Lemma によれば

$(Tri_{上}(n,\mathbb{C})\times Tri_{上}(n-1,\mathbb{C}),\ M(n,n-1))$ は 概均質ベクトル空間. (但し, 作用は $a\in Tr_{上}(n,\mathbb{C})$, $b\in Tri_{上}(n-1,\mathbb{C})$ $x\in M(n,n-1)$ の時 $(a,b)\circ x=axb^{-1}$)

$((Tri_{下}(n,\mathbb{C})\times Tri_{上}(n,\mathbb{C})),\ M_n(\mathbb{C}))$ の相対不変式は

$$P_1(x)=x_1^1 \qquad P_2(x)=\begin{vmatrix} x_1^1 & x_1^2 \\ x_2^1 & x_2^2 \end{vmatrix}, \quad \cdots \quad P_n=\begin{vmatrix} x_1^1 & \cdots & x_1^n \\ \vdots & & \\ x_n^1 & \cdots & x_n^n \end{vmatrix}$$

だから, 対応する $(Tri_{上}(n,\mathbb{C})\times Tri_{上}(n-1,\mathbb{C}),\ M(n,n-1,\mathbb{C}))$ の相対不変式は

$$Q_1(y)=\begin{vmatrix} y_2^1 & \cdots & y_2^{n-1} \\ \vdots & & \vdots \\ y_n^1 & \cdots & y_n^{n-1} \end{vmatrix} \quad Q_2(y)=\begin{vmatrix} y_3^1 & \cdots & y_3^{n-2} \\ \vdots & & \\ y_n^1 & \cdots & y_n^{n-2} \end{vmatrix}, \quad \cdots \quad Q_{n-1}(y)=y_n^1,$$

となる.

例. $V = M(n, m, \mathbb{C})$, $(n>m)$. $G = O(n, \mathbb{C}) \times Tri_{上}(m, \mathbb{C})$.

GのVへの作用を $G \ni (a, b)$ $(a, b)\cdot x = a x b^{-1}$ $x \in M(n, m, \mathbb{C})$

により定義すれば、これは概均質ベクトル空間。従って

Lemma により $\tilde{V} = M(n, n-1)$, $\tilde{G} = O(n, \mathbb{C}) \times GL(n-m, \underbrace{1, 1 \cdots 1}_{m-1})$

(但し、

$$GL(n-m, \underbrace{1 \cdots 1}_{m-1}) = \begin{array}{r} \\ n-m\{ \end{array} \begin{pmatrix} * & * \\ 0 & \ddots \end{pmatrix} \cap GL(n-1)$$ で群の作用

を $(a, b) \in O(n, \mathbb{C}) \times GL(n-m, \underbrace{1 \cdots 1}_{m-1})$, $x \in M(n, n-1)$ の時

$(a, b) x = a x b^{-1}$ により定義する。)

は概均質ベクトル空間である。

(V, G) の相対不変式も対応する。